34　最大・最小（微分法）

291

(1)

$y=(\log_2 x)^3-\log_2 x^3+1=(\log_2 x)^3-3\log_2 x+1 \quad (1\leq x\leq 4)$

ここで，$\log_2 x=t$ とおくと，$y=t^3-3t+1$

また，$1\leq x\leq 4$ より，$0\leq t\leq 2$

よって，$0\leq t\leq 2$ における $y=t^3-3t+1$ の最大値，最小値と与式のそれが一致する。

$y'=3t^2-3=3(t+1)(t-1)$ より，$y=t^3-3t+1$ の増減は次表のようになる。

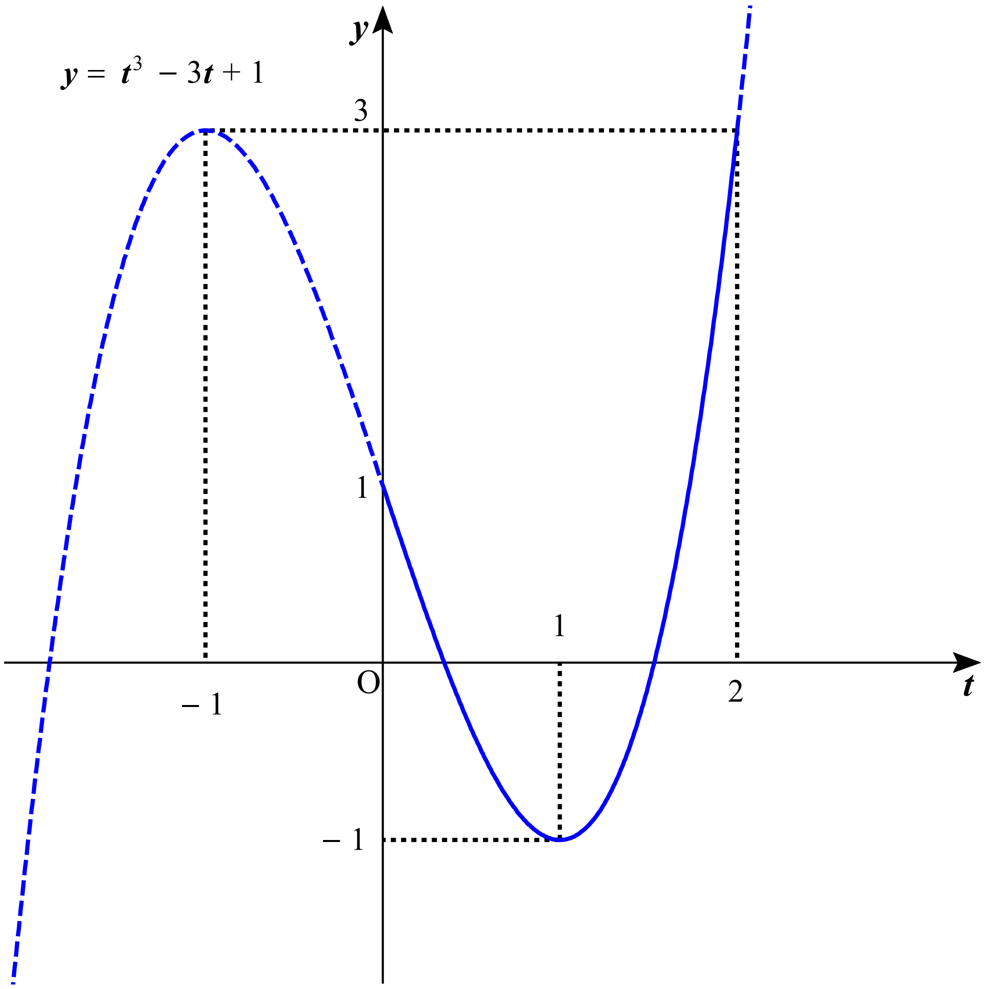
t	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↑	3	↓	-1	↑

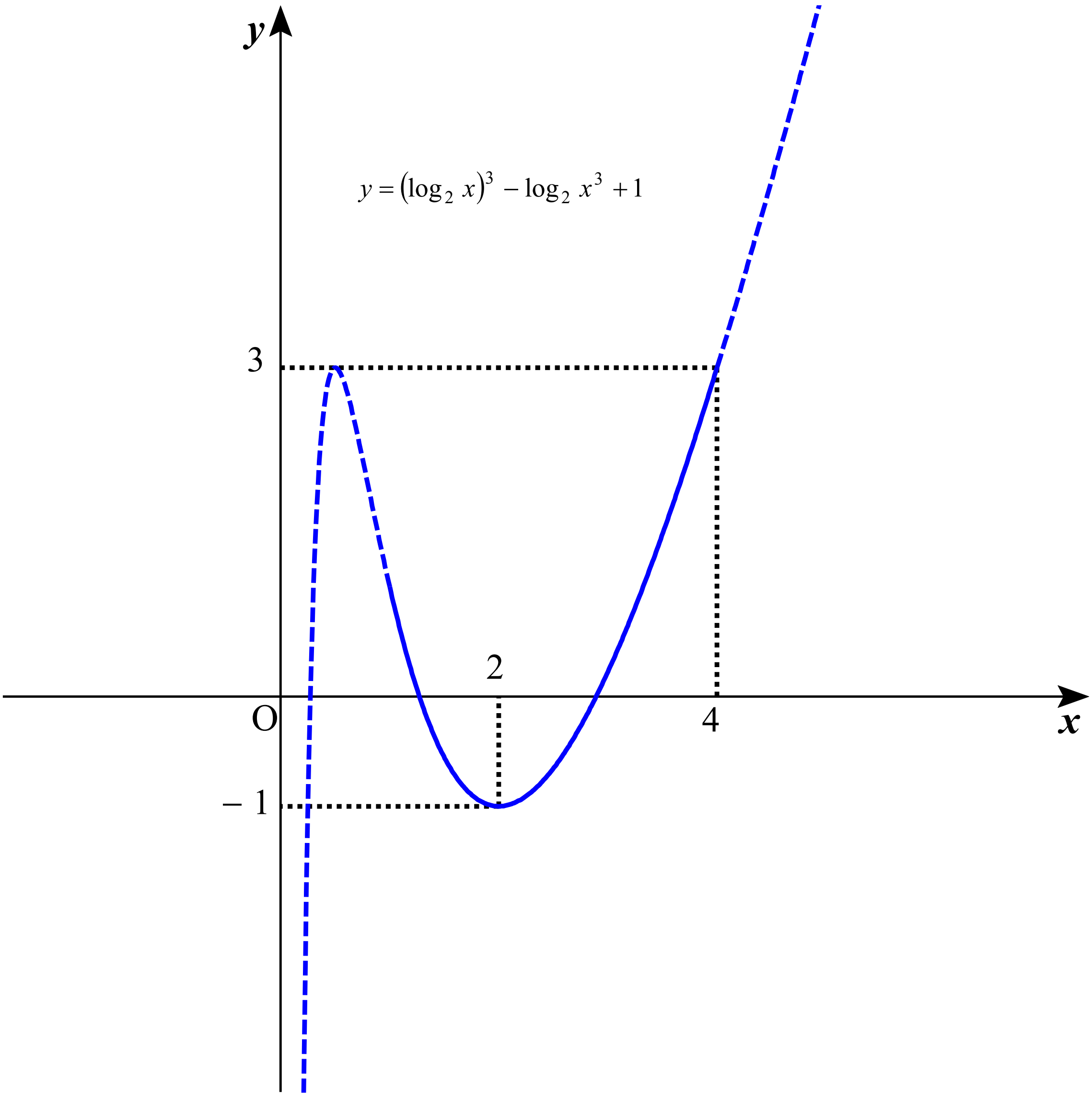
これと，$t=0$ で $y=1$，$t=2$ で $y=3$ より，

$0\leq t\leq 2$ において，$t=2$ で最大値 3，$t=1$ で最小値 -1 をとる。

ゆえに，$y=(\log_2 x)^3-\log_2 x^3+1=(\log_2 x)^3-3\log_2 x+1 \quad (1\leq x\leq 4)$ は

$x=4$ で最大値 3，$x=2$ で最小値 -1 をとる。





y
$y=(\log_2 x)^3-\log_2 x^3+1$
3
2
O
4
x
-1

(2)

(ア)

$$t^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x$$
$$=1+2\sin x\cos x$$

より，$\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$　・・・(答)

$$y=\sin^3 x+\cos^3 x$$
$$=(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)$$
$$=(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)$$

これに $\sin x+\cos x=t$，$\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$ を代入することにより，$y=\dfrac{3t-t^3}{2}$　・・・(答)

(イ)

$t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$　・・・①

これと，$0\leq x\leq 2\pi$ より，$-\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2}$

$y=\dfrac{3t-t^3}{2}$ の $-\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2}$ における最大値，最小値と与式のそれが一致するから，

$y=\dfrac{3t-t^3}{2}$ の増減を調べると，$y'=\dfrac{3(1-t^2)}{2}=-\dfrac{3}{2}(t+1)(t-1)$ より，

その増減は次表のようになる。

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\downarrow$	-1	$\uparrow$	1	$\downarrow$

これと，$t=-\sqrt{2}$ で $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$t=\sqrt{2}$ で $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ より，

$-\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2}$ において，$t=1$ で最大値 1，$t=-1$ で最小値 -1 とる。

また，①より，

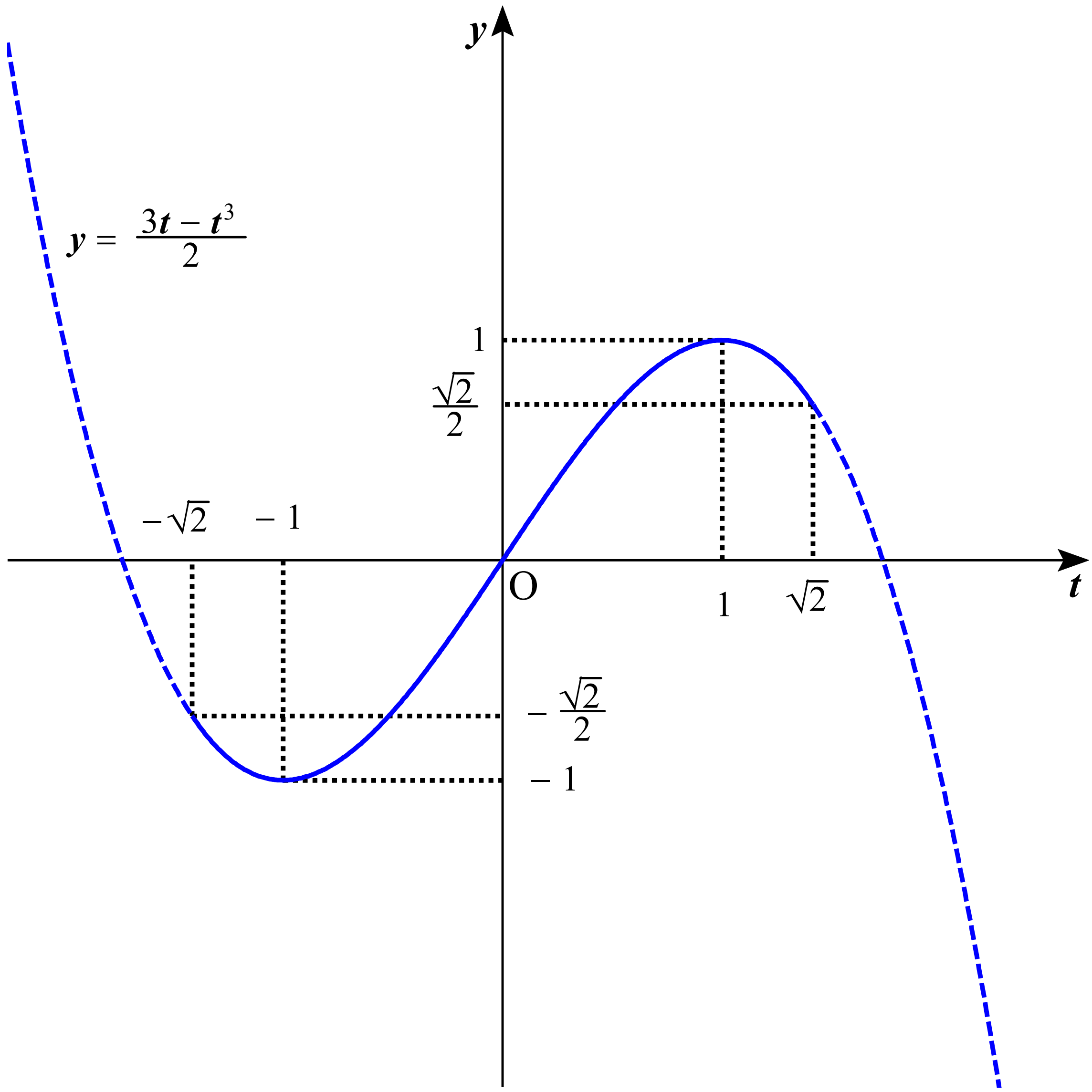
$t=1$ のとき

$1=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ $(0\leq x\leq 2\pi)$ より，$x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4},\ \pi-\dfrac{\pi}{4},\ 2\pi+\dfrac{\pi}{4}$　$\therefore x=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ 2\pi$

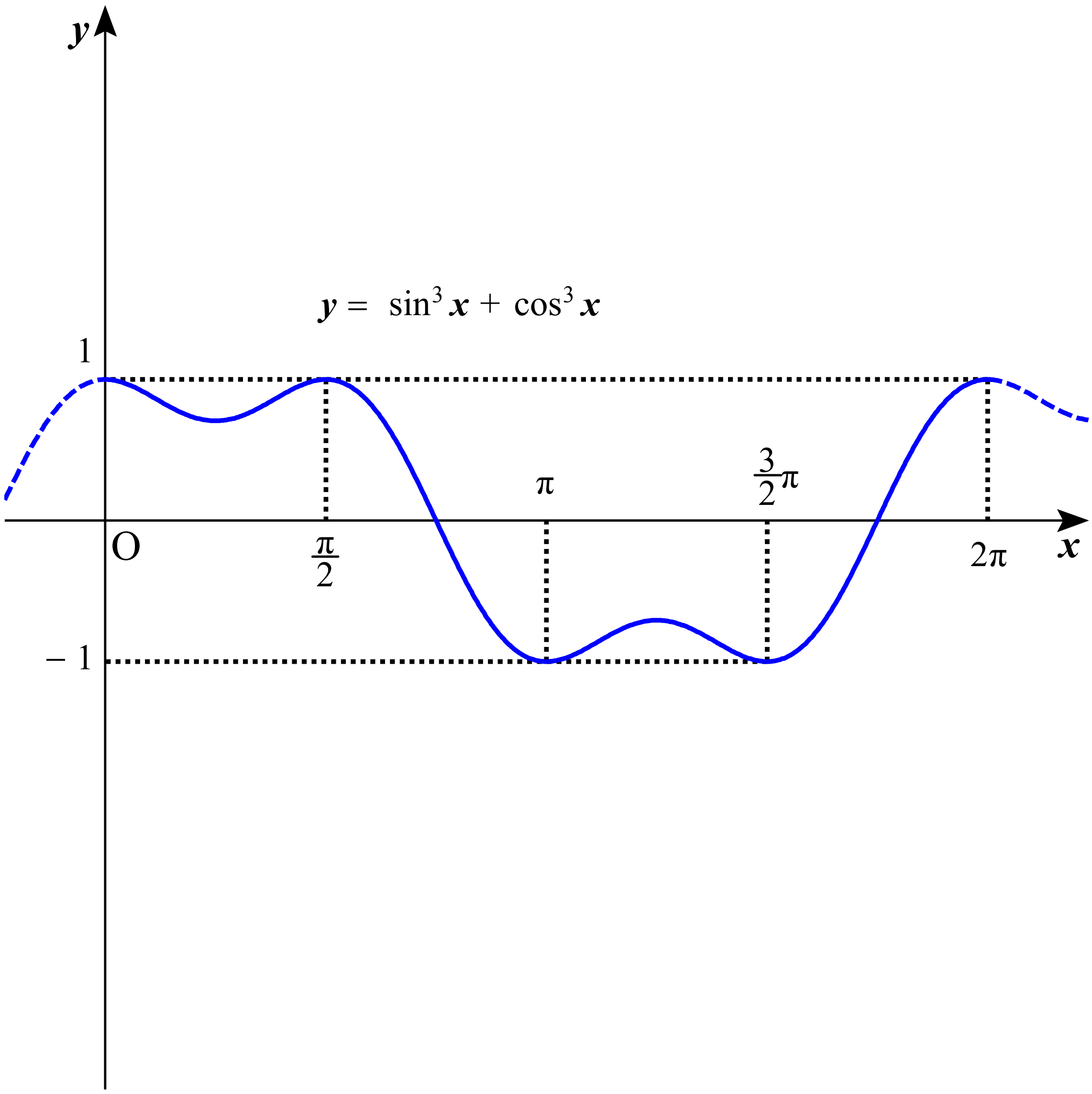
$t=-1$ のとき

$-1=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ $(0\leq x\leq 2\pi)$ より，$x+\dfrac{\pi}{4}=\pi+\dfrac{\pi}{4},\ 2\pi-\dfrac{\pi}{4}$　$\therefore x=\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

よって，$x=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ 2\pi$ で最大値 1，$x=\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$ で最小値 -1 をとる。



y
$y = \frac{3t - t^3}{2}$
1
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\sqrt{2}$
-1
O
1
$\sqrt{2}$
t
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
-1


y
$y = \sin^3 x + \cos^3 x$
1
− 1
O
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3}{2}\pi$
2π
x

292

(1)

放物線は軸に関して対称であることと，$y=-x^2+6x=-(x-3)^2+9$ より，$x=3$ が軸であることから，横の長さは $2(3-a)$ である。

これと，高さが $-a^2+6a$ より，$S(a)=2(3-a)(-a^2+6a)$ $\therefore S(a)=2a^3-18a^2+36a$

(2)

$S'(a)=6a^2-36a+36=6(a^2-6a+6)$

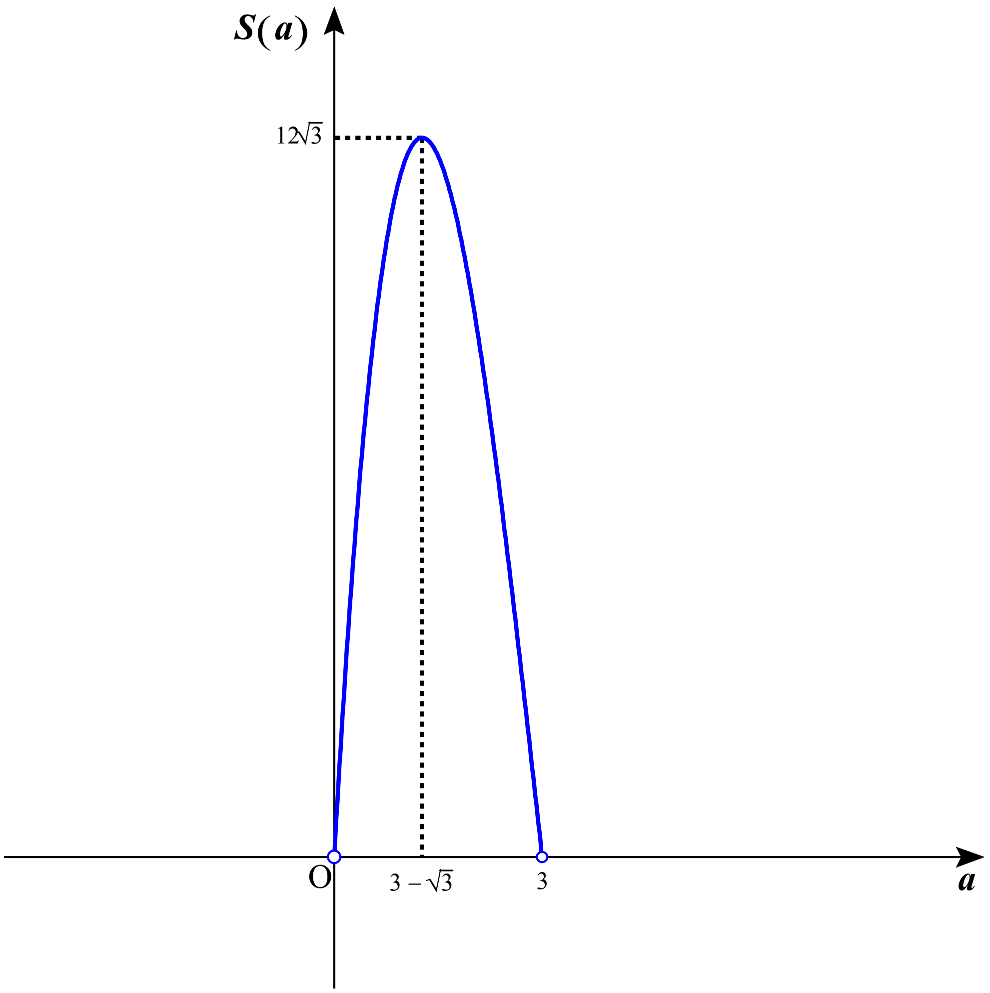
$a^2-6a+6=0$ の解は $a=3\pm\sqrt{3}$

よって，$S(a)$ の増減は次表のようになる。

a	0	$\cdots$	$3-\sqrt{3}$	$\cdots$	3
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$	0	$\uparrow$	極大	$\downarrow$	0

ゆえに，$S(a)$ は $a=3-\sqrt{3}$ で最大となる。

また，$S(a)$ のグラフは下図のようになる。



293

(1)

$f'(x)=3x^2+6ax=3x(x+2a)$， $0<a<1$ より， $f(x)$ の増減は次表のようになる。

x	$\cdots$	$-2a$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↑	極大	↓	極小	↑

よって，極大値は $f(-2a)=4a^3+b$，極小値は $f(0)=b$

(2)

(1)の増減表より，

最大値 1 をとるのは $f(-2a)=4a^3+b$ と $f(1)=3a+b+1$ が，

最小値 -5 をとるのは $f(0)=b$ または $f(-2)=12a+b-8$ が考えられる。

最大値について

$$f(-2a)-f(1)=4a^3-3a-1$$
$$=(a-1)(2a+1)^2$$

これと， $0<a<1$ より，

$f(-2a)-f(1)=(a-1)(2a+1)^2<0$

よって， $f(1)=3a+b+1$ が最大値 1 をとる。

ゆえに， $3a+b+1=1$ より， $b=-3a$　・・・①

最小値について

$f(0)=b$ が最小値 -5 をとるとすると， $b=-5$

これと①より， $a=\dfrac{5}{3}>1$

$0<a<1$ だから，不適

$f(-2)=12a+b-8$ が最小値 -5 をとるとすると，

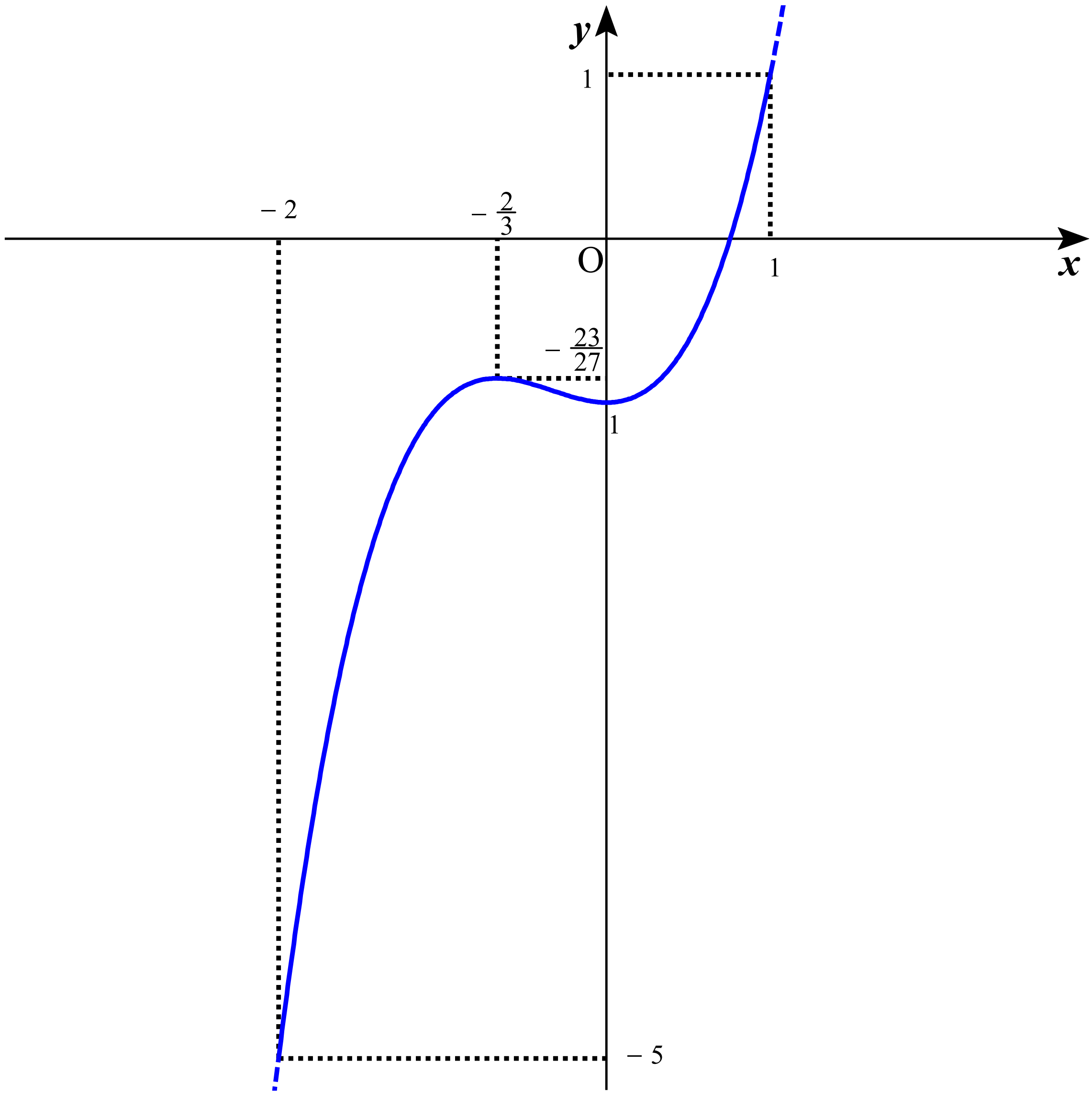
①より， $f(-2)=12a+b-8=9a-8$ だから， $9a-8=-5$

よって， $a=\dfrac{1}{3}$

これは $0<a<1$ を満たす。

また，このとき，①より， $b=-1$

以上より， $a=\dfrac{1}{3}, b=-1$


y
1
− 2
$-\frac{2}{3}$
O
1
x
$-\frac{23}{27}$
1
− 5

294

(1)

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-a^2x-\frac{2}{3}a^3$$
$$=\frac{1}{3}(x+a)^2(x-2a)$$

より，

$x<2a$ で $f(x)<0$，$x\geq 2a$ で $f(x)\geq 0$

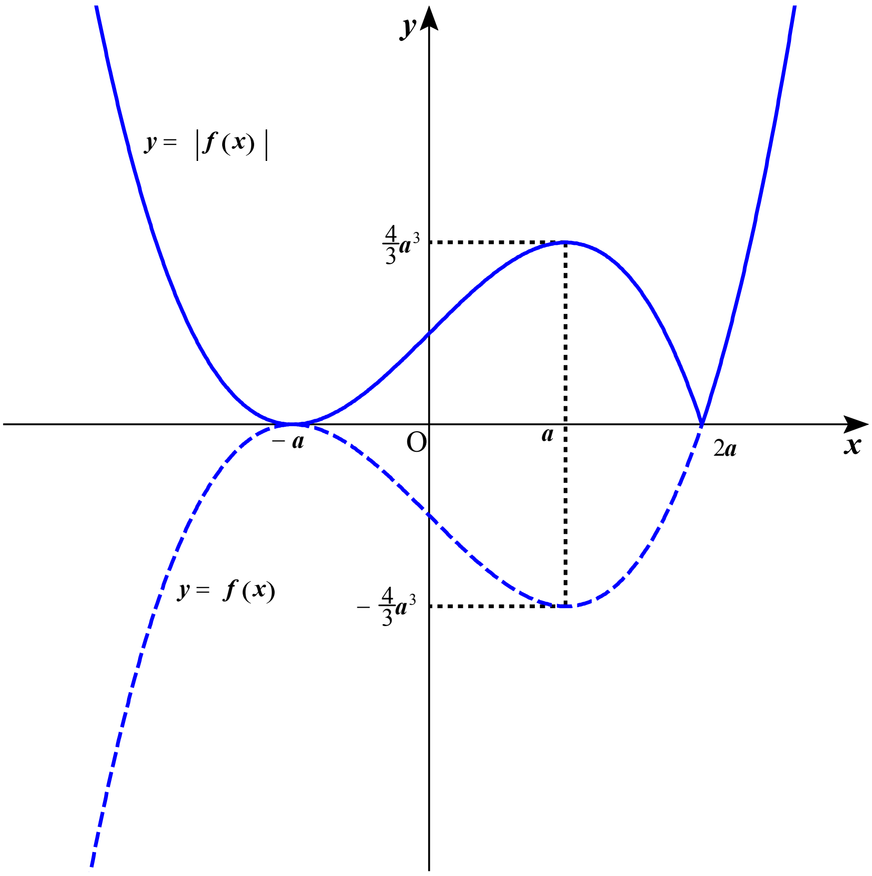
よって，$|f(x)|=\begin{cases}-f(x) & (x<2a)\\ f(x) & (x\geq 2a)\end{cases}$　・・・①

また，$f'(x)=x^2-a^2=(x+a)(x-a)$ より，$f(x)$ の増減は次表のようになる。

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↑	0	↓	$-\frac{4}{3}a^3$	↑

・・・②

①と②および $y=f(x)$ と $y=-f(x)$ は x 軸に関して対称であることから，
$y=|f(x)|$ のグラフは次図実線のようになる。



(2)

$x<2a$ において $|f(x)|=\frac{4}{3}a^3$ となる x 座標を求めると，

①より，$-f(x)=\frac{4}{3}a^3$　すなわち $-\frac{1}{3}x^3+a^2x+\frac{2}{3}a^3=\frac{4}{3}a^3$

両辺に 3 を掛け，整理すると，$x^3-3a^2x+2a^3=0$ より，$(x-a)^2(x+2a)=0$　$\therefore x=a$

ゆえに，$y=|f(x)|$ は点 $\left(-2a,\ \frac{4}{3}a^3\right)$ を通る。　・・・③

また，①において，$-f(-p)$ と $f(p)$ の大小を比較すると，

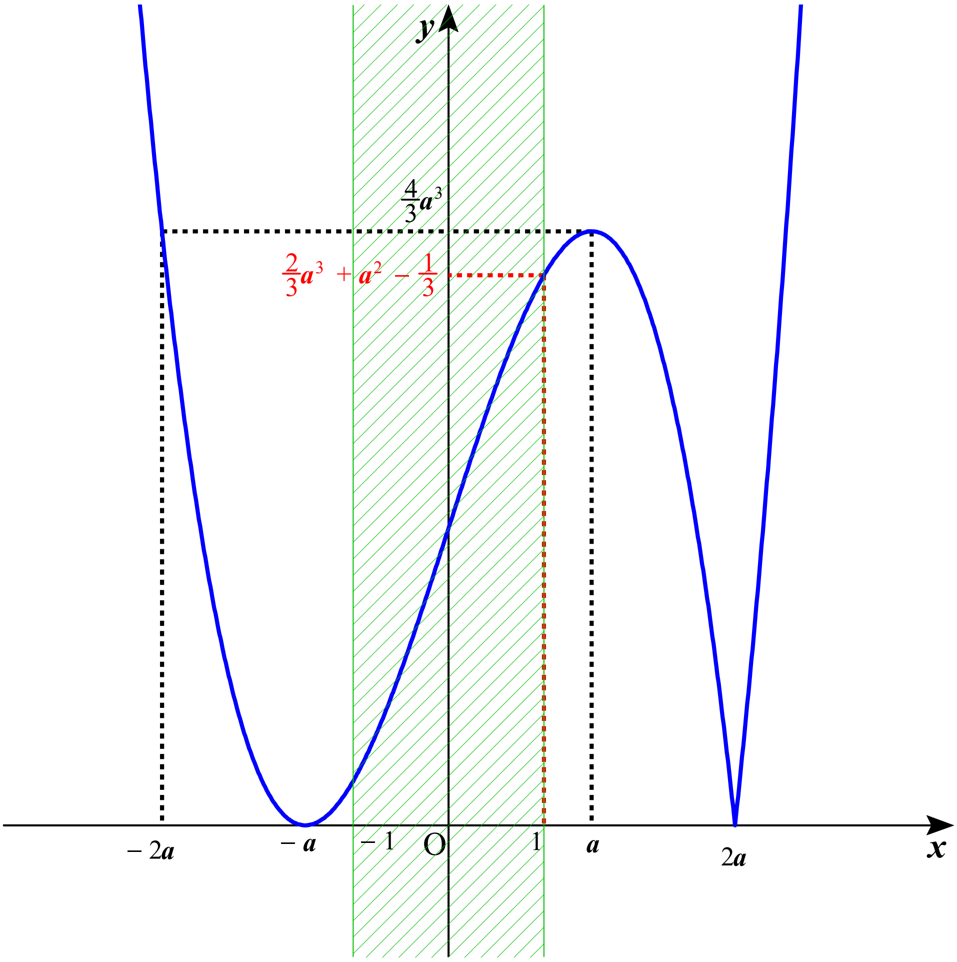
$-f(-p)=-\left(-\frac{1}{3}p^3+a^2p-\frac{2}{3}a^3\right)=\frac{1}{3}p^3-a^2p+\frac{2}{3}a^3$，$f(p)=\frac{1}{3}p^3-a^2p-\frac{2}{3}a^3$ より，

$-f(-p)>f(p)$　・・・④

③と④を考慮することにより，$|f(x)|$ の最大値は以下のように場合分けし，求められる。

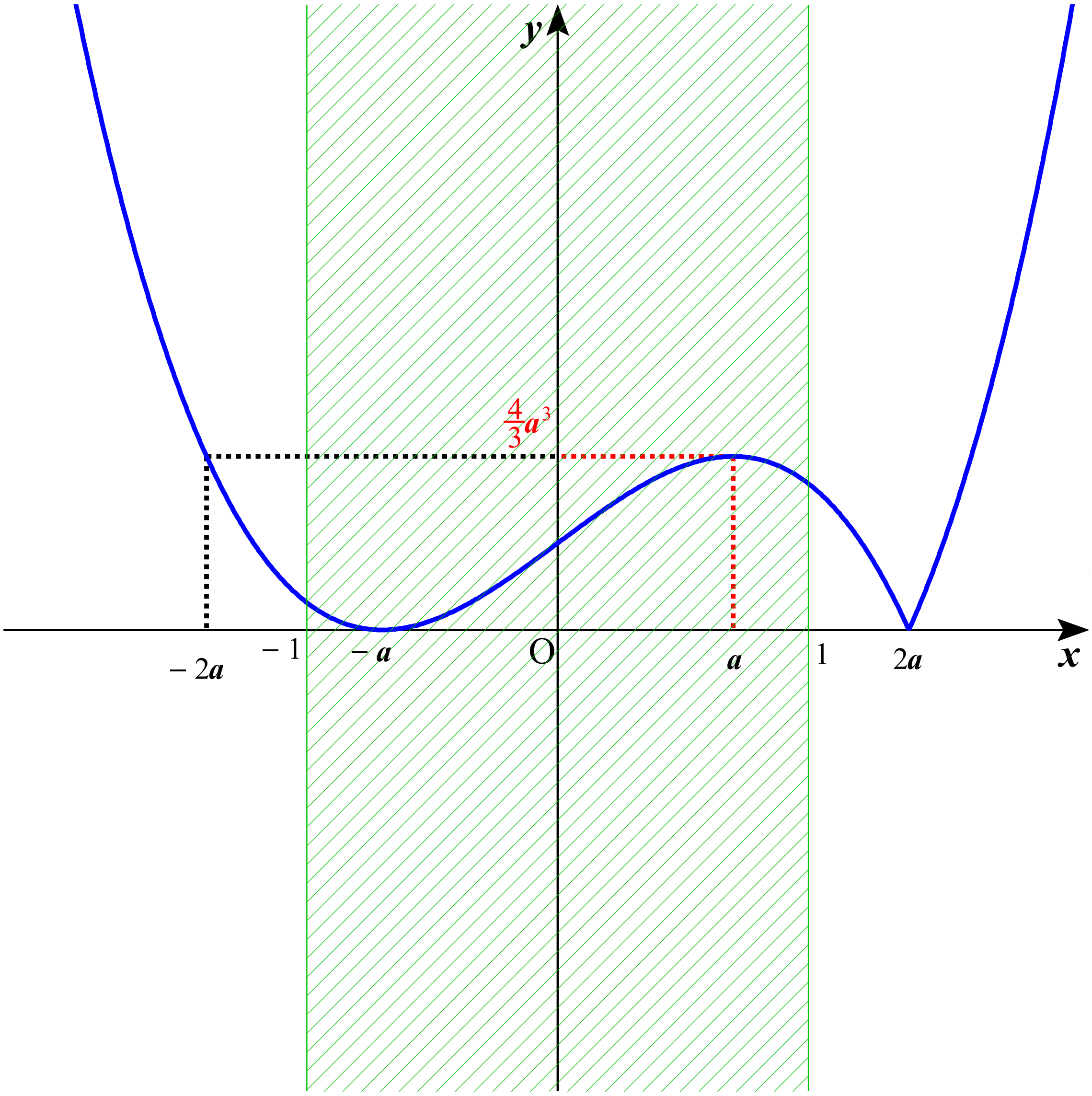
$1<a$ のとき

$|f(x)|$ は $x=1$ で最大値 $|f(1)|=f(1)=\frac{2}{3}a^3+a^2-\frac{1}{3}$ をとる。



$-2a<-1\leq -a$ すなわち $\frac{1}{2}<a\leq 1$ のとき

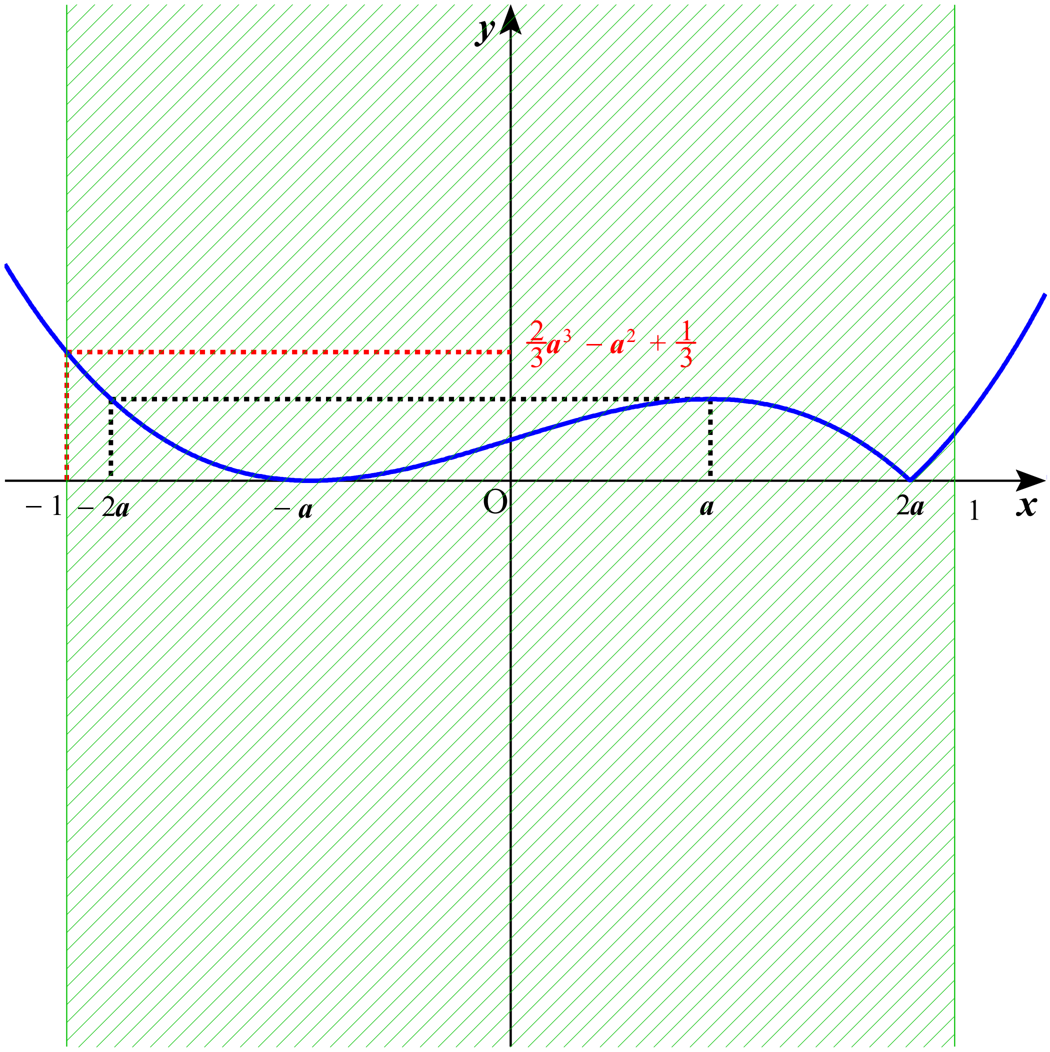
$|f(x)|$ は $x=a$ で最大値 $|f(a)|=-f(a)=\frac{4}{3}a^3$ をとる。



$-1 \leq -2a$　すなわち　$0 < a \leq \dfrac{1}{2}$ のとき

$f(-1) \geq \dfrac{4}{3}a^3$ かつ，④より，$-f(-1) > f(1)$ だから，

$|f(x)|$ は $x=-1$ で最大値 $|f(-1)| = -f(-1) = \dfrac{2}{3}a^3 - a^2 + \dfrac{1}{3}$ をとる。



以上より，最大値は

$0 < a \leq \dfrac{1}{2}$ のとき $\dfrac{2}{3}a^3 - a^2 + \dfrac{1}{3}$

$\dfrac{1}{2} < a \leq 1$ のとき $\dfrac{4}{3}a^3$

$1 < a$ のとき $\dfrac{2}{3}a^3 + a^2 - \dfrac{1}{3}$

295

$x+y=u$，$xy=v$ とおくと，実数 $x,\ y$ は $t^2-ut+v=0$ の解である。

これと，$D=u^2-4v$ より，$u^2-4v\geq 0$　$\therefore v\leq\dfrac{u^2}{4}$　・・・①

また，$x^2+xy+y^2=6$ より，$u^2-v=6$　すなわち　$u^2-6=v$　・・・②

よって，①，②より，$u^2-6\leq\dfrac{u^2}{4}$　$\therefore u^2\leq 8$　$\therefore -2\sqrt{2}\leq u\leq 2\sqrt{2}$　・・・③

$$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y=xy(x+y)-(x+y)^2+x+y$$
$$=vu-u^2+u$$

ここで，②を用いて v を消去し，整理することにより，

$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y=u^3-u^2-5u$

これと③より，u^3-u^2-5u のとる値の範囲を $-2\sqrt{2}\leq u\leq 2\sqrt{2}$ において調べればよい。

$f(u)=u^3-u^2-5u$ とおくと，$f'(u)=3u^2-2u-5=(u+1)(3u-5)$ より，

$-2\sqrt{2}\leq u\leq 2\sqrt{2}$ における $f(u)$ の増減は次表のようになる。

u	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\dfrac{5}{3}$	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
$f'(u)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(u)$	$-8-6\sqrt{2}$	↑	3	↓	$-\dfrac{175}{27}$	↑	$-8+6\sqrt{2}$

また，

$3-\left(-8+6\sqrt{2}\right)=11-6\sqrt{2}=11-\sqrt{72}>0$ より，$3>-8+6\sqrt{2}$

$-\dfrac{175}{27}-\left(-8-6\sqrt{2}\right)=\dfrac{41}{27}+6\sqrt{2}>0$ より，$-8-6\sqrt{2}<-\dfrac{175}{27}$

よって，$-2\sqrt{2}\leq u\leq 2\sqrt{2}$ において $-8-6\sqrt{2}\leq f(u)\leq 3$

すなわち $-8-6\sqrt{2}\leq x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y\leq 3$

296

(1)

解法 1

点 Q を中心とする円の半径を 0 から大きくしていくと，ある半径のとき初めてその円と放物線 C_1 が共有点をもつ，すなわち接する。このときの接点を P' $(t,\ f(t))$ とすると，円の半径すなわち点 P' と点 Q の距離が P と点 Q の距離の最小値となる。

また，点 P' における C_1 の接線は C_1 と円の共通接線であり，円と接線の関係から，接線と QP' のなす角は $90°$，すなわち，それら 2 つのベクトルの内積は 0 である。

そこで，その内積から t と a の関係式を求めると，

P' $\left(t,\ \dfrac{t^2}{4}\right)$ における C_1 の接線の傾きは，$y'=\dfrac{x}{2}$ より，$\dfrac{t}{2}$

よって，そのベクトルは$\begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$と表せる。

また，$\overrightarrow{\mathrm{QP'}}=\begin{pmatrix} t-2a \\ \dfrac{t^2}{4}-\left(\dfrac{a^2}{4}-2\right) \end{pmatrix}$より，$\begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} t-2a \\ \dfrac{t^2}{4}-\left(\dfrac{a^2}{4}-2\right) \end{pmatrix}=0$

よって，$2(t-2a)+t\left\{\dfrac{t^2}{4}-\left(\dfrac{a^2}{4}-2\right)\right\}=0$

これを展開し，tについて整理すると，$\dfrac{1}{4}\left\{t^3+\left(16-a^2\right)t-16a\right\}=0$より，

$\dfrac{1}{4}(t-a)\left(t^2+at+16\right)=0$ ・・・①

また，$t^2+at+16=0$の判別式をDとすると，$D=a^2-64$
そこで，$D<0,\ D=0,\ D>0$の3つの場合に分けて，P'Qの値すなわちPと点Qの距離の最小値を求めることにする。

(i) $D<0$すなわち$0<a<8$のとき

①式の実数解は$t=a$

よって，$\mathrm{P'}\left(a,\ \dfrac{a^2}{4}\right)$より，$\mathrm{P'Q}=\sqrt{(2a-a)^2+\left\{\left(\dfrac{a^2}{4}-2\right)-\dfrac{a^2}{4}\right\}^2}=\sqrt{a^2+4}$ ・・・②

(ii) $D=0$すなわち$a=8$のとき

Qの座標は$(16,\ 14)$で第1象限の$y<\dfrac{x^2}{4}$の領域に属するから，点Qを中心とする円の半径を大きくしていくとC_1上の第1象限の部分ではじめて接する。

一方，①に$a=8$を代入し整理すると$\dfrac{1}{4}(t-8)(t+4)^2=0$より，

点Qを中心とする円とC_1との接点は$(8,\ 16)$と$(-4,\ 4)$である。
このうち，$(8,\ 16)$が第1象限の点であることから，P'の座標は$(8,\ 16)$である。

これは，(i)の$\mathrm{P'}\left(a,\ \dfrac{a^2}{4}\right)$で$a=8$とした場合だから，②に含まれる。

(iii) $D>0$すなわち$a>8$のとき

①において，$t^2+at+16=0$は異なる2実数解をもつから，解を$\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$とすると，

考えられるP'の座標は$\left(a,\ \dfrac{a^2}{4}\right),\left(\alpha,\ \dfrac{\alpha^2}{4}\right),\left(\beta,\ \dfrac{\beta^2}{4}\right)$

ここで，$t^2+at+16=0$の解と係数の関係より，$\alpha+\beta=-a<0,\ \alpha\beta=16>0$

よって， $\alpha < \beta < 0$ となり， C_1 上の点 $\left(\alpha,\ \dfrac{\alpha^2}{4}\right), \left(\beta,\ \dfrac{\beta^2}{4}\right)$ は第 2 象限に属する。

一方， $a > 8$ より， C_1 上の点 $\left(a,\ \dfrac{a^2}{4}\right)$ は第 1 象限に属する。

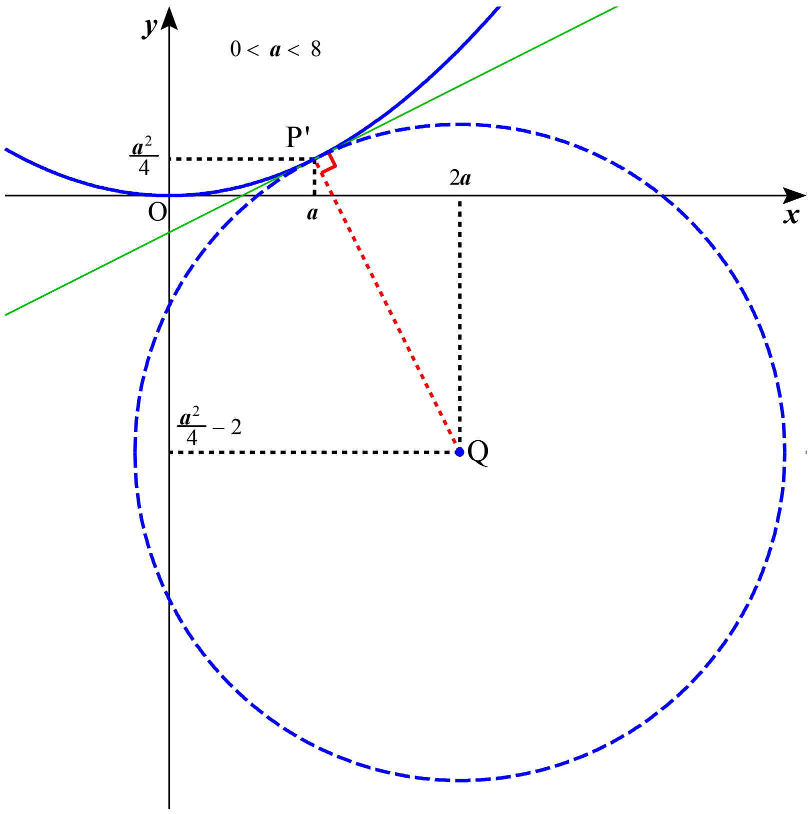
また, 点 Q $\left(2a,\ \dfrac{a^2}{4}-2\right)$ は, $0 < \dfrac{a^2}{4} - 2 < \dfrac{(2a)^2}{4}$ より, 第 1 象限の $y < \dfrac{x^2}{4}$ の領域に属する。

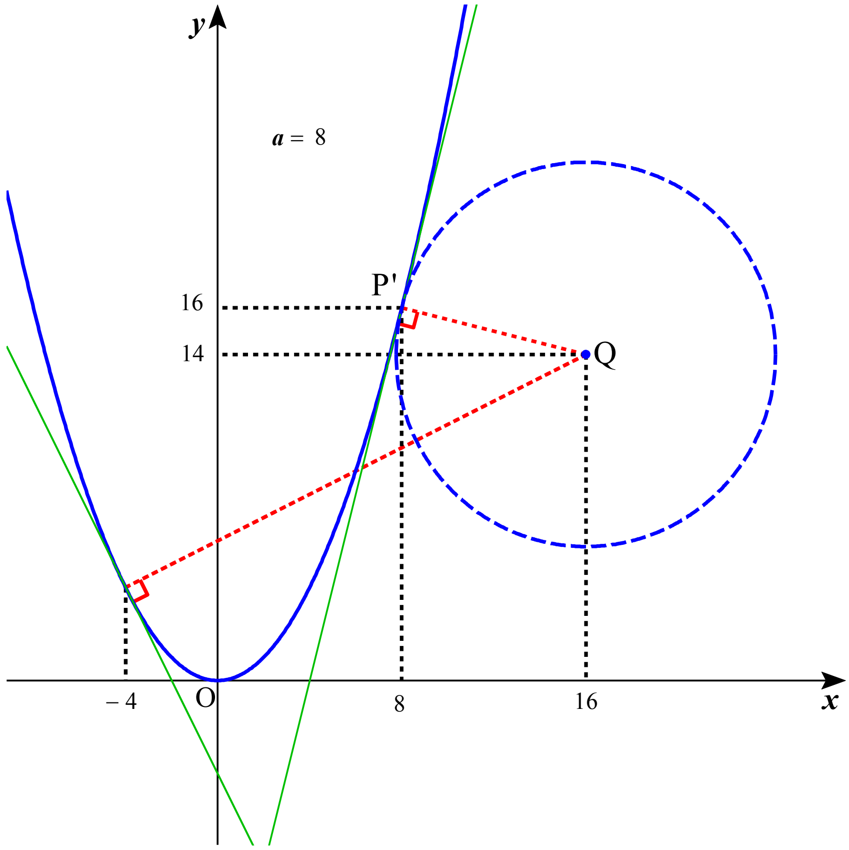
よって， 点 Q を中心とする円がはじめて C_1 と接する点は $\left(a,\ \dfrac{a^2}{4}\right)$ である。

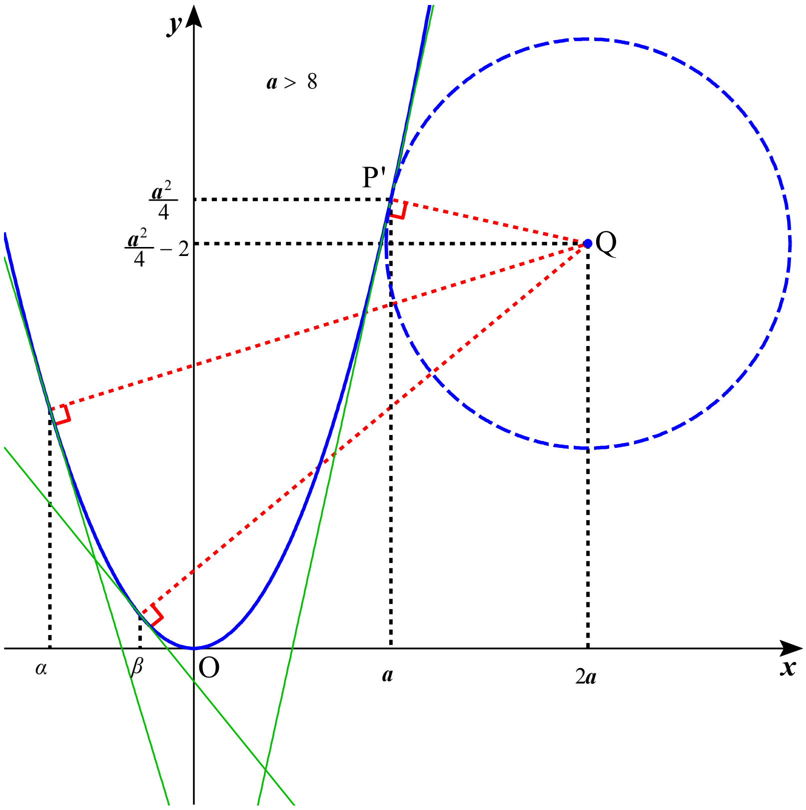
ゆえに， $\mathrm{P}'\left(a,\ \dfrac{a^2}{4}\right)$ であり， これより， $\mathrm{P'Q} = \sqrt{a^2+4}$

(i)～(iii)より， P と点 Q の距離の最小値は $\sqrt{a^2+4}$ である。

参考図




y
a = 8
P'
16
14
Q
−4
O
8
16
x


y
a > 8
P'
a²/4
a²/4 − 2
Q
α
β
O
a
2a
x

解法 2

$\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{t^2}{4}\right)$，$\mathrm{PQ}^2=f(t)$ とおくと，$f(t)=(t-2a)^2+\left(\dfrac{t^2}{4}-\dfrac{a^2}{4}+2\right)^2$ より，

$$\begin{aligned}f'(t)&=2(t-2a)+2\left(\frac{t^2}{4}-\frac{a^2}{4}+2\right)'\left(\frac{t^2}{4}-\frac{a^2}{4}+2\right)\\&=2t-4a+2\cdot\frac{t}{2}\left(\frac{t^2}{4}-\frac{a^2}{4}+2\right)\\&=\frac{1}{4}\left\{t^3+\left(16-a^2\right)t-16a\right\}\\&=\frac{1}{4}(t-a)\left(t^2+at+16\right)\end{aligned}$$

$t^2+ta+16=0$ の判別式を D とすると，$D=a^2-64$

(i) $D<0$ すなわち $0<a<8$ のとき

$f'(t)=\dfrac{1}{4}(t-a)\left(t^2+at+16\right)$ において，$f'(t)=0$ の解は $t=a$

これと，$t^2+at+16>0$ より，$f(t)$ の増減は次表のようになる。

t	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\downarrow$	$f(a)$	$\uparrow$

よって，$f(t)$ の最小値は $f(a)=a^2+4$

(ii) $D=0$ すなわち $a=8$ のとき

$f'(t)=\dfrac{1}{4}(t-8)(t+4)^2$ より，$f(t)$ の増減は次表のようになる。

t	$\cdots$	-4	$\cdots$	8	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\downarrow$	$f(-4)$	$\downarrow$	$f(8)$	$\uparrow$

よって，$f(t)=(t-16)^2+\left(\dfrac{t^2}{4}-14\right)^2$ の最小値は $f(8)=68$

また，これは $f(a)=a^2+4$ に $a=8$ を代入した値と等しい。

(iii) $D>0$ すなわち $a>8$ のとき

$t^2+at+16=0$ は異なる 2 実数解をもつから，解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，

解と係数の関係より，$\alpha+\beta=-a<0,\ \alpha\beta=16>0$ より，$\alpha<\beta<0$

よって，$\alpha<\beta<0<a$ より，$f(t)$ の増減は次表のようになる。

t	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\downarrow$	$f(\alpha)$	$\uparrow$	$f(\beta)$	$\downarrow$	$f(a)$	$\uparrow$

よって，最小値は $f(\alpha)$ または $f(a)$ である。

$$f(\alpha)-f(a)=(\alpha-2a)^2+\left(\frac{\alpha^2}{4}-\frac{a^2}{4}+2\right)^2-\left(a^2+4\right)$$
$$\geq(\alpha-2a)^2-a^2-4$$

ここで，$\alpha<0$ かつ $a>0$ より，$(\alpha-2a)^2>(2a)^2=4a^2$

よって，$f(\alpha)-f(a)>4a^2-a^2+4=3a^2-4$

これと，$a>8$ より，$f(\alpha)-f(a)>3a^2-4>0$

よって，$f(a)<f(\alpha)$

ゆえに，$f(t)$ の最小値は $f(a)=a^2+4$

(i)～(iii)より，$f(t)$ の最小値は $f(a)=a^2+4$

よって，P と点 Q の距離の最小値は $\sqrt{f(a)}=\sqrt{a^2+4}$

(2)

(1)の解法 1 の流れで解くと

(1)より，$(x-2a)^2+\left(y-\frac{a^2}{4}+2\right)^2=a^2+4$ は C_1 と接する。

$2a^2\geq a^2+4$ すなわち $a\geq2$ のとき

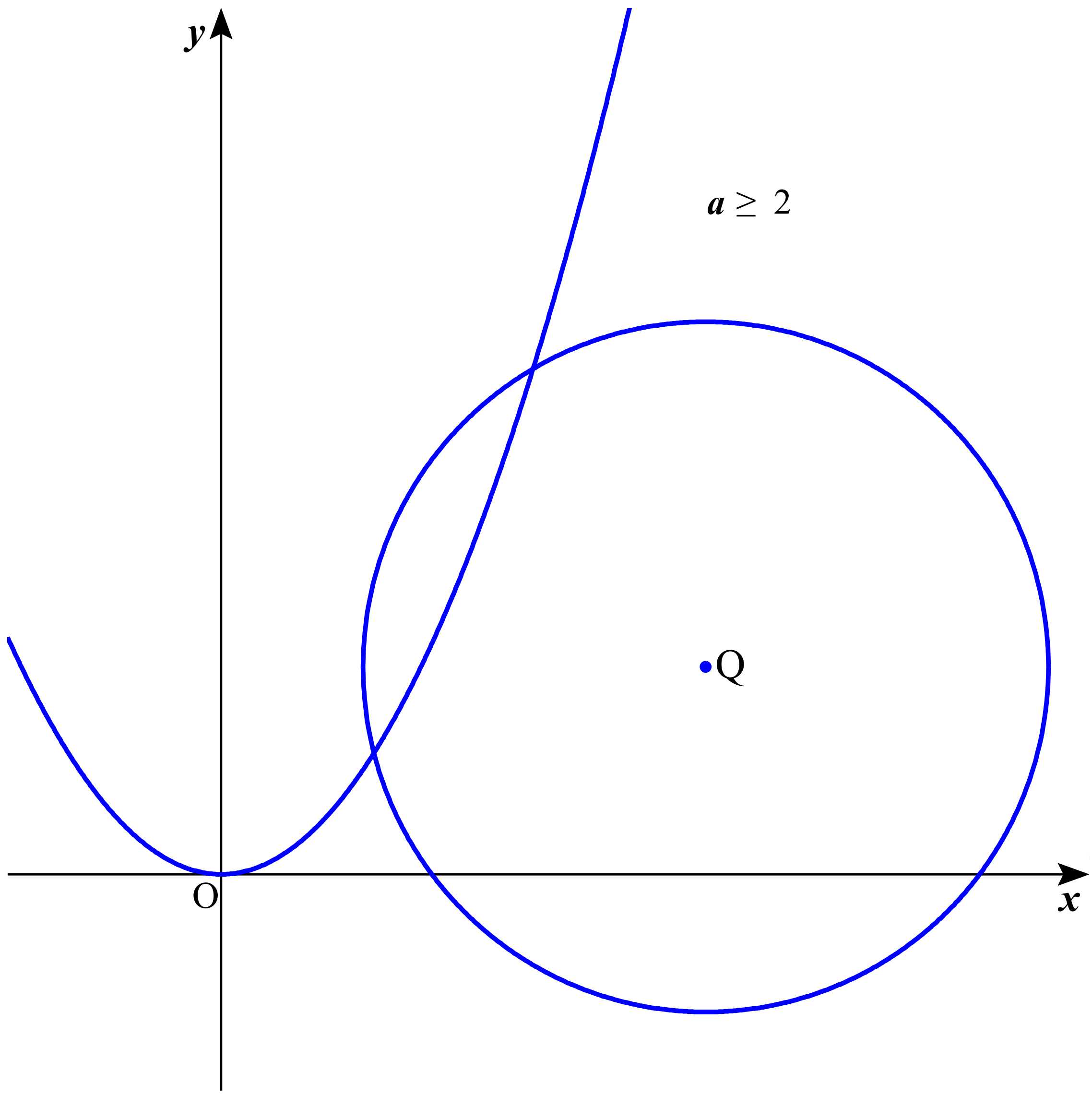
C_2 の半径が $\sqrt{a^2+4}$ 以上だから，C_1 と C_2 は共有点をもつ。

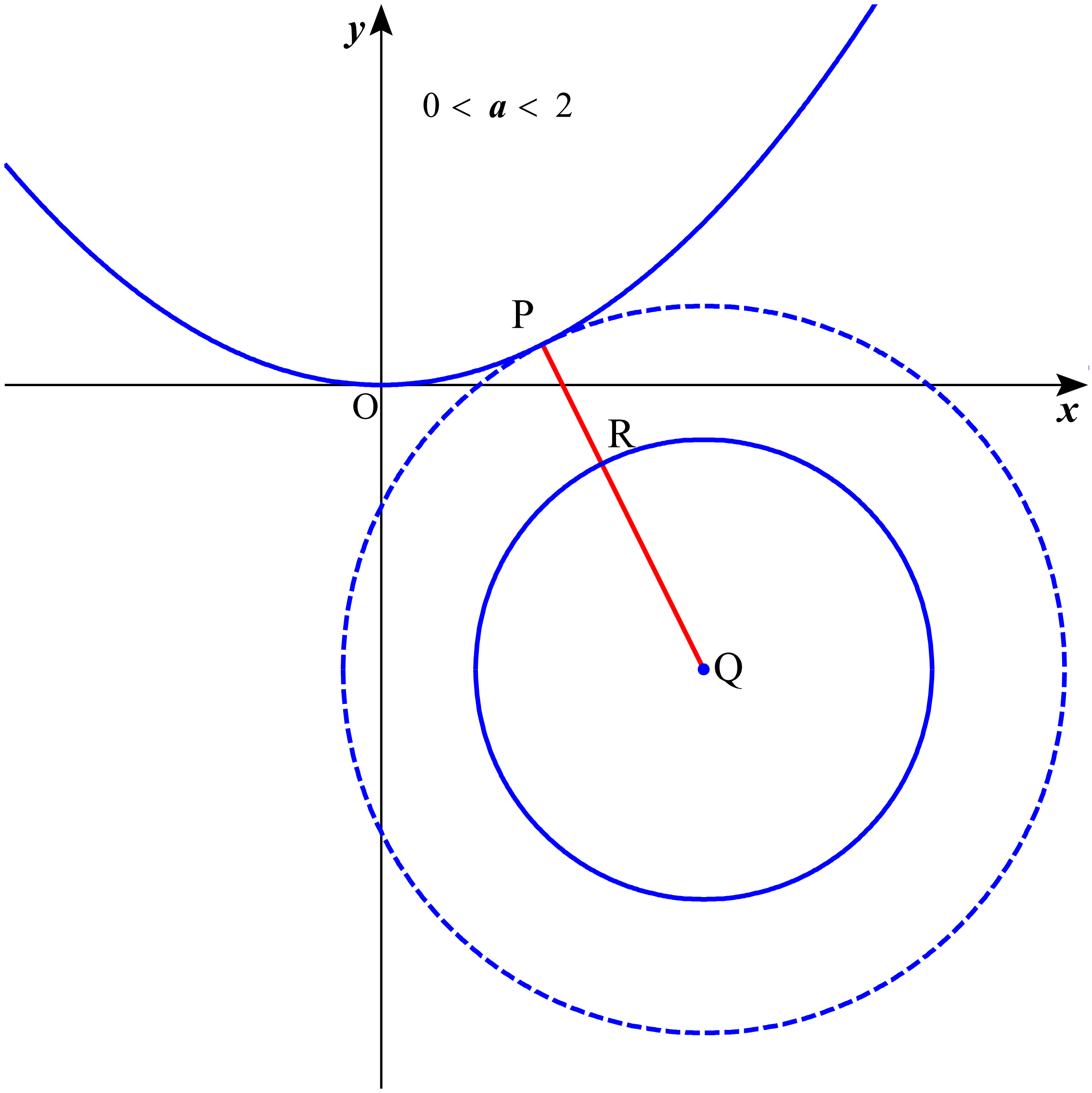
したがって，P と R が同じ共有点に位置するとき，すなわち同一座標のとき，
P と R の距離は最小値 0 をとる。

$2a^2\leq a^2+4$ すなわち $0<a<2$ のとき

$(x-2a)^2+\left(y-\frac{a^2}{4}+2\right)^2=a^2+4$ と C_1 の接点が P，R が線分 PQ と C_2 の交点のとき，

P と R の距離は最小値 $\sqrt{a^2+4}-\sqrt{2}a$ をとる。


y
a ≥ 2
Q
O
x



y
$0 < a < 2$
P
O
x
R
Q

297

(1)

$f'(x)=3x^2-3a=3(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$ より，$f(x)$ の増減は次表のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{a}$	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↑	極大	↓	極小	↑

よって，極小値 $f(\sqrt{a})=-2a\sqrt{a}+b$，極大値 $f(-\sqrt{a})=2a\sqrt{a}+b$

(2)

$(t,\ f(t))$ と $(-t,\ f(-t))$ の中点は $\left(\dfrac{t+(-t)}{2},\ \dfrac{f(t)+f(-t)}{2}\right)=(0,\ b)=(0,\ f(0))$ である。

よって，$y=f(x)$ は点 $(0,\ f(0))$ に関して対称である。

これと $f(0)=b\geq 0$ より，

$f(x)$ が単調増加するとき，すなわち $a\leq 0$ のとき

$|f(-t)|\leq|f(t)|\ (t>0)$ より，$M=|f(1)|=f(1)=-3a+b+1$

$f(x)$ が極値をもつとき，すなわち $a>0$ のとき

$1<\sqrt{a}$ のとき，すなわち $a>1$ のとき

$|f(-t)|\geq|f(t)|\ (t>0)$ より，$M=|f(-1)|=f(-1)=3a+b-1$

$\sqrt{a}\leq 1$ のとき

$t>\sqrt{a}$ において $|f(-t)|\leq|f(t)|$（等号は $b=0$ のとき成立）

そこで，$x^3-3ax+b=2a\sqrt{a}+b\ (x\neq-\sqrt{a})$ の解を求めると，

$(x+\sqrt{a})^2(x-2\sqrt{a})=0$ より，$x=2\sqrt{a}$

よって，

$\sqrt{a}\leq 1<2\sqrt{a}$ のときすなわち $\dfrac{1}{4}<a\leq 1$ のとき：$M=|f(-\sqrt{a})|=f(-\sqrt{a})=2a\sqrt{a}+b$

$2\sqrt{a}\leq 1$ すなわち $0<a\leq\dfrac{1}{4}$ のとき：$M=|f(1)|=f(1)=-3a+b+1$

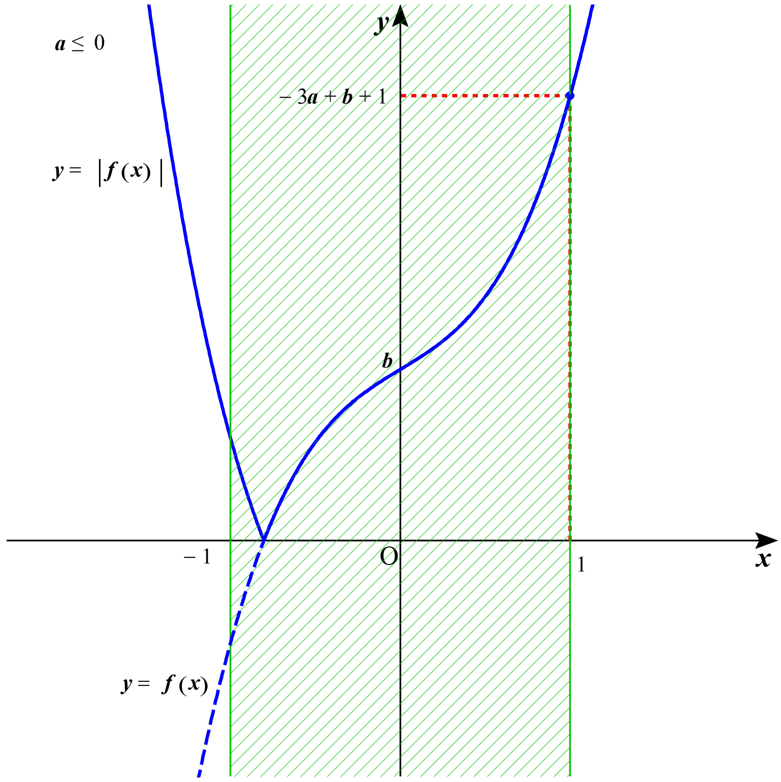
以上より，

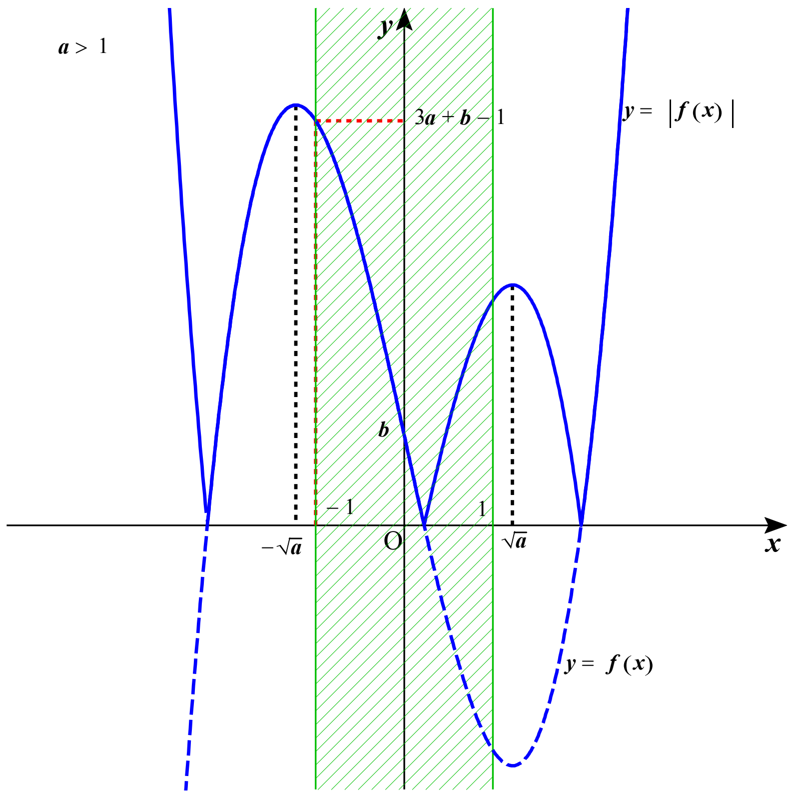
$a\leq\dfrac{1}{4}$ のとき：$M=-3a+b+1$

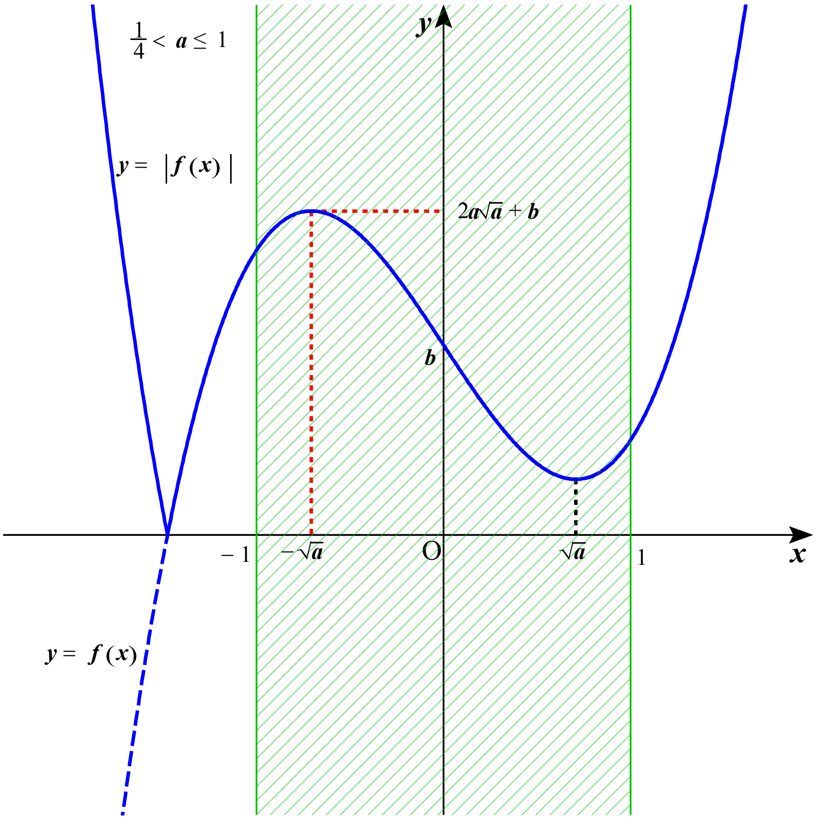
$\dfrac{1}{4}<a\leq 1$ のとき：$M=2a\sqrt{a}+b$

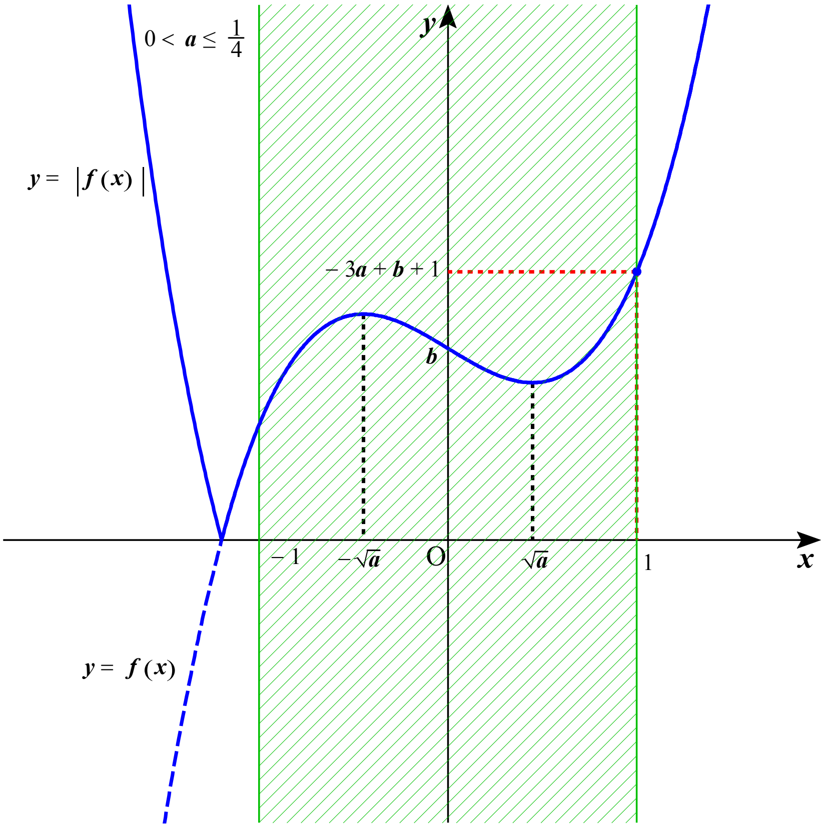
$a>1$ のとき：$M=3a+b-1$

参考図






$\frac{1}{4} < a \leq 1$
$y = |f(x)|$
$2a\sqrt{a} + b$
b
y
-1
$-\sqrt{a}$
O
$\sqrt{a}$
1
x
$y = f(x)$


$0 < a \leq \frac{1}{4}$
$y = |f(x)|$
$-3a + b + 1$
b
y
-1
$-\sqrt{a}$
O
$\sqrt{a}$
1
x
$y = f(x)$

(3)

$b \geq 0$ のとき

$a \leq \frac{1}{4}$ のとき

$M = -3a + b + 1$ より，$M \geq b + \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4} < a \leq 1$ のとき

$M = 2a\sqrt{a} + b$ より，$b + \frac{1}{4} < M \leq b + 2$

$a > 1$ のとき

$M = 3a + b - 1$ より，$M > b + 2$

よって，$M \geq b + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}$

$b < 0$ のとき，(2)と同様にして，

$a \leq \frac{1}{4}$ のとき

$M = |f(-1)| = -f(-1) = -3a - b + 1$ より，$M \geq -b + \frac{1}{4}$　・・・①

$\frac{1}{4} < a \leq 1$ のとき

$M = \left|f\left(\sqrt{a}\right)\right| = -f\left(\sqrt{a}\right) = 2a\sqrt{a} - b$ より，$-b + \frac{1}{4} < M \leq -b + 2$

$a > 1$ のとき

$M = |f(1)| = -f(1) = 3a - b - 1$ より，$M > -b + 2$

よって，$M \geq -b + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}$　・・・②

①，②より，$M \geq \frac{1}{4}$

補足

$y=|f(x)|=|x^3-3ax+b|$ 上の点 $(X,\ Y)$ を y 軸に関して対称移動した点を $(x,\ y)$ とすると，

$(x,\ y)=(-X,\ Y)$ より，$(X,\ Y)=(y,\ -x)$

これと，$Y=|f(X)|$ より，$y=|f(-x)|=|-x^3+3ax+b|=|x^3-3ax-b|$

よって，$y=|x^3-3ax+b|$ と y 軸に関して対称なグラフは $y=|x^3-3ax-b|$ である。

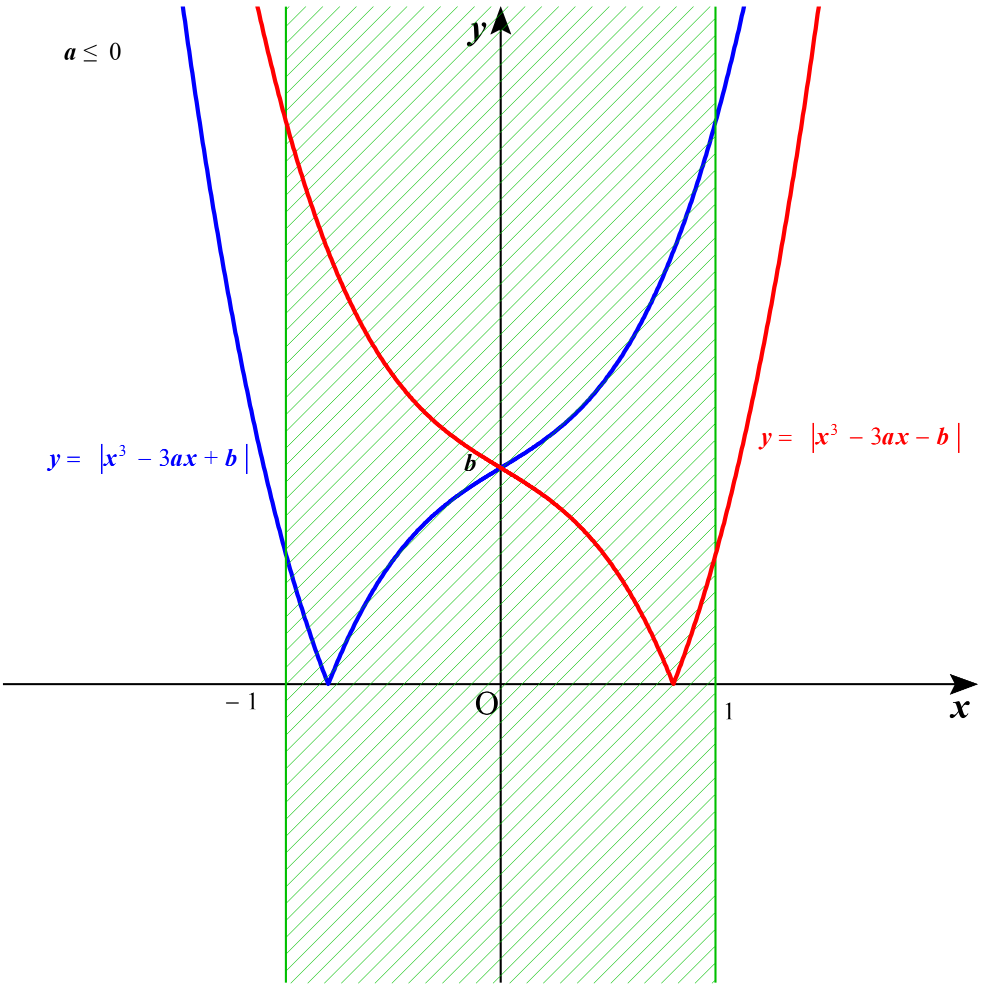
一方，$y=|x^3-3ax-b|=|x^3-3ax+(-b)|$ より，

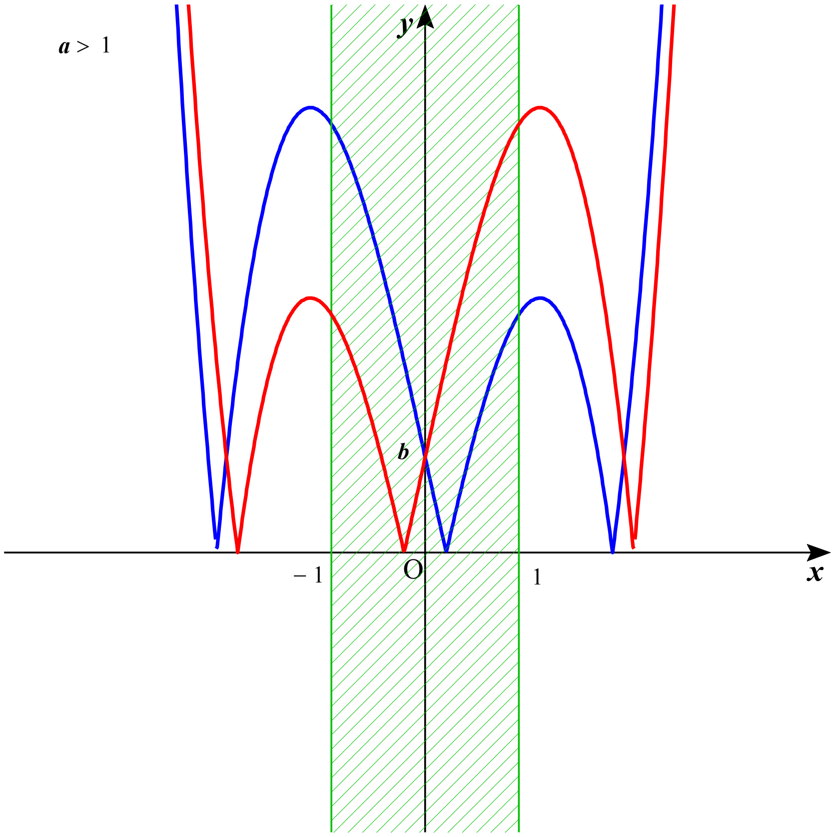
$y=|x^3-3ax+b|$ と $y=|x^3-3ax-b|$ は $y=|f(x)|$ の b の符号が異なる。

したがって，$y=|f(x)|$ の b の符号を入れ替えたグラフは y 軸に関して対称である。

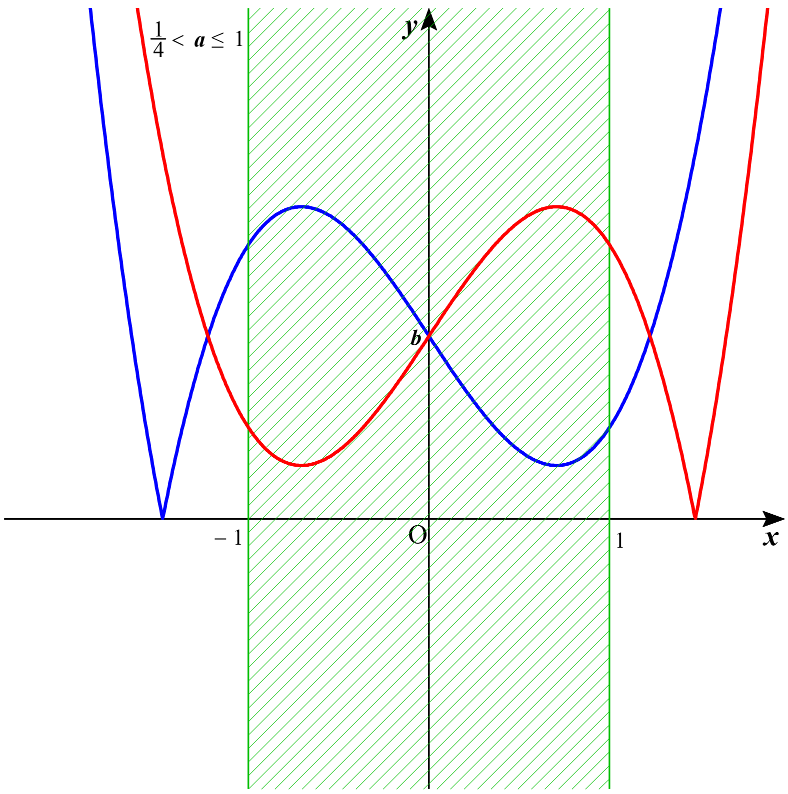
よって，$b<0$ のときと $b\geq 0$ のときで M のとりうる値の範囲は同じである。

参考図

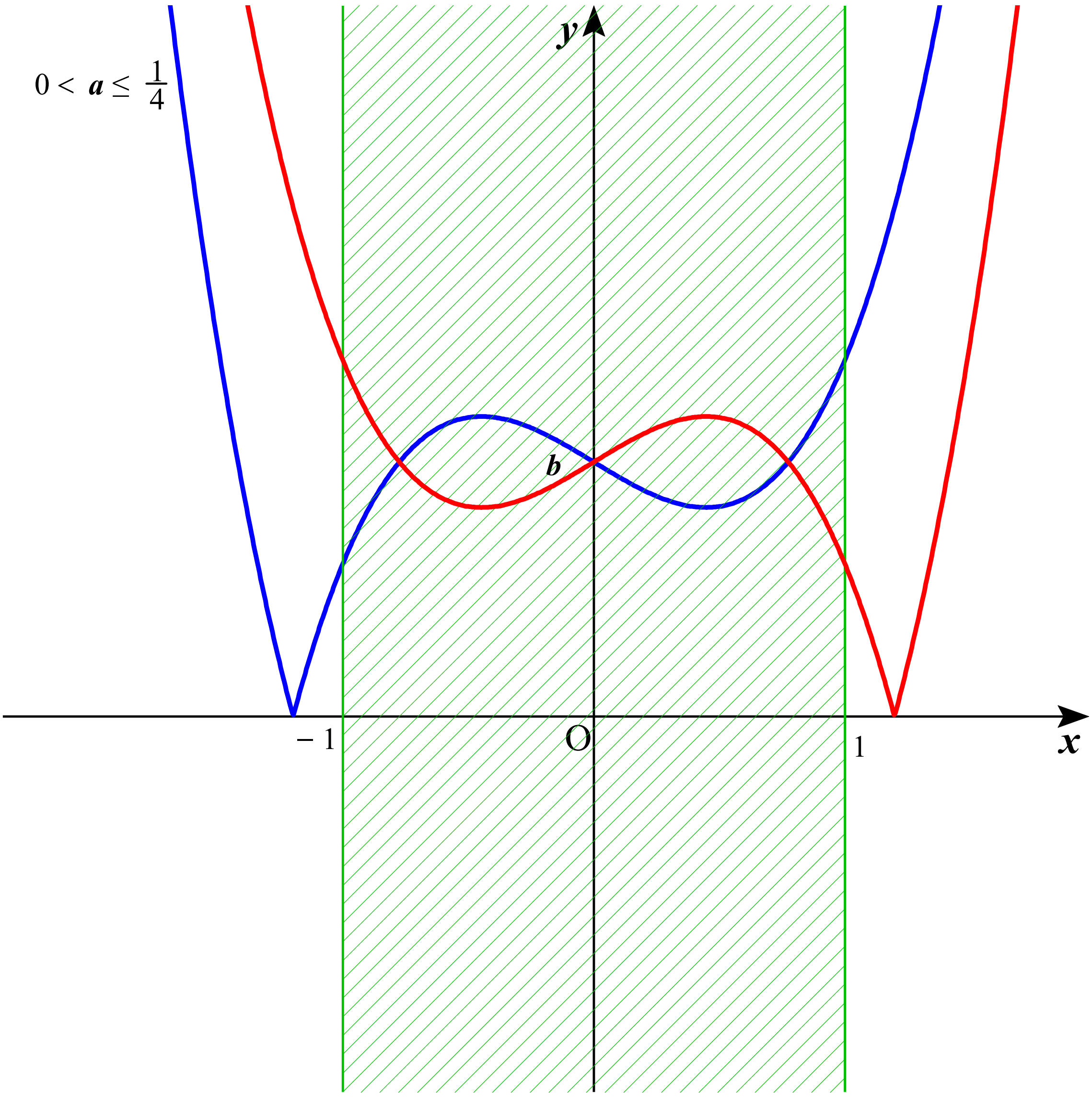




a > 1
y
b
− 1
O
1
x



1/4 < a ≤ 1
y
b
− 1
O
1
x



$0 < a \leq \frac{1}{4}$
y
b
− 1
O
1
x